TEST D'ADMISSION EN 1ERE ANNEE IIT BTP

Epreuve de Mathématiques

Durée : 1 h

Exercice 1. (7 points)

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 1 200 et B en a produit 800.
L'atelier A produit 4% de pièces défectueuses et B en produit 3% .
On prend une puce au hasard dans la commande.
On note A l'événement :"la puce provient de l'atelier A", B l'événement :" la puce provient de l'atelier B" et D :"la puce est défectueuse".

1. Dessiner un arbre puis donner les probabilités $P(A), P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
2. Montrer que $P(D)$=0,036 puis calculer $P_D(A)$.
3. Calculer $P_{\bar{D}}(B)$
4. On décide de choisir 20 pièces avec remise dans la commande. On note X le nombre de pièces défectueuses.
   Montrer que X suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi. Calculer $P(X \geq 2)$.
5. En supposant que la durée de vie Y en années d'une puce suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, calculer $P(Y \geq 1)$.

Exercice 2. (7 points)

Soit $I = [0,1]$. On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases}$

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à I.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 1$
3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Montrer que (u_n) est convergente. Calculer sa limite.
5. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+4}$ puis calculer alors $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 3. (6 points)

On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $j^3 = 1$ (c) $1 + j + j^2 = 0$ (d) $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$
2. Dans un repère orthonormal du plan, on considère les points M, N et P d'affixes respectives m,n et p.
   Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si $m + nj + pj^2 = 0$.
   (on pourra commencer par démontrer que $m - n = -j^2(p-n)$)